Sucesiones eventualmente periódicas.

Miguel Cerdá Bennassar

Julio de 2021

Resumen

En este escrito se presenta un algoritmo que define una función generadora de secuencias eventualmente periódicas, con los valores del ciclo elegibles.

Palabras clave

Secuencias eventualmente periódicas, ciclos, iteraciones.

Descripción

Todas las secuencias generadas con esta función serán eventualmente periódicas, con un período de p=2, cuyo ciclo podremos elegir asignando un valor a m.

Sean $k \in \mathbb{N}_0$ y k(n), $m \in \mathbb{Z}$, se define este algoritmo como la función f(k) tal que:

$$f(k) = \begin{cases} (k-m)/2 & \text{si k y m son de la misma paridad} \\ (3k+1+m)/2 & \text{si k y m son de distinta paridad} \end{cases}$$

Se itera sobre k en función de su paridad y de la paridad de m, generando una sucesión de interacciones $\{k, f1(k_n), f2(k_n), \ldots, fn(k_n)\}$ cuyo menor elemento es 1-m.

Para $\forall\, k \in \mathbb{N}_0$, en un número finito de iteraciones, k(n)=1-m con período p_1=2-m y p_2=1-m.

Si m es negativo, el número inicial k tiene que ser mayor que -1*m.

Calculador online: www.riodena.es

Ejemplos

1 - Valores del último elemento de la secuencia k(n), según el valor de m:

Valor de m	k(n)
1	0
0	1
-1	2
-2	3
. . .	. . .
2	-1
3	-2
4	-3
5	-4
. . .	. . .

2 - Una sucesión que llegará hasta el número 11, asignando a m el valor de -10.

f(k) = 85, 123, 180, 95, 138, 74, 42, 26, 18, 14, 12, 11, 12, 11 . . .

Cálculos:

(85 * 3 - 9) / 2 = 123
(123 * 3 - 9) / 2 = 180
(180 + 10) / 2 = 95
(95 * 3 - 9) / 2 = 138
(138 + 10) / 2 = 74
(74 + 10) / 2 = 42
(42 + 10) / 2 = 26
(26 + 10) / 2 = 18
(18 + 10) / 2 = 14
(14 + 10) / 2 = 12
(12 + 10) / 2 = 11
(11 * 3 - 9) / 2 = 12
(12 + 10) / 2 = 11
. . .

3 - Algunas secuencias y sus valores de k y m:

Secuencia empezada con k=7 y m=0 f(k)= 7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

Secuencia empezada con k=5 y m=2 f(k)= 5, 9, 15, 24, 11, 18, 8, 3, 6, 2, 0, -1.

Secuencia empezada con k=0 y m=7 f(k)= 0, 4, 10, 19, 6, 13, 3, -2, 1, -3, -5, -6.

Conclusiones

1 - Todas las secuencias empezadas con cualquier número entero no negativo $k \in \mathbb{N}_0$, llegarán hasta el número 1-m $\in \mathbb{Z}$.

2 - La función puede generar infinitas secuencias eventualmente periódicas, porque podemos elegir infinitos números enteros no negativos para iniciarlas y podemos elegir también a qué número entero llegarán. Esto significa que a la infinitud de $k \in \mathbb{N}_0$, se une también la infinitud de $m \in \mathbb{Z}$.

3 - Dos secuencias en las que el valor de k+m sean iguales, la distancia entre sus respectivos términos k(n) será igual a la distancia entre sus valores de m.

$$k(n)-k_1(n)=m-m_1 \iff k+m=k_1+m_1$$

4 - Para todo número entero m, existe un único entero k(n), que cumple que m+k(n)=1 y para todo número entero k(n), existe un único entero m, que cumple que k(n)+m=1.

$$\forall\, m \in \mathbb{Z},\ \exists!\, k(n) \in \mathbb{Z} : m+k(n)=1$$

$$\forall\, k(n) \in \mathbb{Z},\ \exists!\, m \in \mathbb{Z} : m+k(n)=1$$

5 - Todas las secuencias obtenidas con m=0 llegarán hasta el número 1-m=1 y serán similares a las secuencias obtenidas con el algoritmo de la conjetura de Collatz, porque (k-0)/2= k/2, (3k+1+0)/2=(3k+1)/2.
Demostrar que esas secuencias llegan todas hasta el número 1, es equivalente a demostrar que las secuencias generadas con la función presentada en este escrito, llegarán todas a cualquier número entero $\mathbb{Z}$ que nosotros queramos.

El contenido de este escrito es original del autor, por lo que no hay en él ninguna cita bibliográfica.

Miguel Cerdá Bennassar.
Mallorca, 27 de Julio de 2021